TD 14 : Limites, continuité Indications

Limites

1 (*Calcul de limites*) Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$

2) $\lim\limits_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(e^x)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$

5) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

7) $\lim\limits_{x\to0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$

2 Soit $f : x \mapsto \dfrac{\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor}{x}$.

1) Déterminer, si elles existent, les limites à gauche et à droite de f en 0. Est-ce que f admet une limite en 0 ?
2) Même question en $\dfrac{1}{2}$.

3 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ avec $\ell\in\mathbb{R}^*$. En revenant à la définition de la limite, montrer que $\dfrac{1}{f} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{\ell}$.

4 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que la fonction $g : x\mapsto \lim\limits_{x^-} f$ est croissante.

Utiliser le théorème de la limite monotone.

5 Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite en la valeur indiquée :

1) $f : x\mapsto \cos(\sin x)$ en $+\infty$.
2) $g : x\mapsto e^{\frac{1}{\sin x}}$ en 0.
3) $h : x\mapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ en $+\infty$.

Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite.

6 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique qui admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Supposer par l'absurde que f n'est pas constante. Il existe donc $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $f(a)\neq f(b)$. Puis, remarquer que $f(a)=f(a+T)=f(a+2T)=\dots$ et idem pour $f(b)$.

7 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x,y>0 \qquad |f(x)-f(y)|\leq\frac{x}{y}$$

Avec $x=1$ (par exemple) et y qui tend vers $+\infty$, qu'obtient-on ?

8 Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ croissante positive. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

Comme $f(x+1)-f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, on a par définition :

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists A\in\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad x\geq A \implies f(x+1)-f(x)\leq\varepsilon$$

Il faut ensuite utiliser cette définition pour obtenir une majoration de $\dfrac{f(x)}{x}$ par une expression $g(x)$ qui tend vers ε quand x tend vers $+\infty$.

Continuité

9 Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? en 1 ?

10 On pose

$$g : x\mapsto\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$$

Déterminer l'ensemble de définition de g. En quel(s) point(s) peut-on prolonger par continuité la fonction g ?

11 ★★ Soit $X \subset \mathbb{R}$. Rappeler la caractérisation de l'assertion "X est dense dans $\mathbb{R}$" avec des suites.
En déduire que la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$, notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, est discontinue en tout réel a.
Utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

12 ★★ Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ \beta & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $x > -1$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2) Déterminer une CNS sur α et β pour que f admette un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$.

Passer à la forme exponentielle et calculer la limite de ce qui se trouve dans l'exponentielle dans un premier temps.

13 ★★☆ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On procèdera par analyse-synthèse, en déterminant f sur $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$.
En essayant de déterminer f sur $\mathbb{N}$, on se rend compte qu'on ne peut pas déterminer la valeur de $f(1)$. On peut donc poser $a = f(1)$ et exprimer f en fonction du paramètre a.

14 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.
Supposer par l'absurde que f n'est pas constante : il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Remarquer ensuite que $f(a) = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = f\left(\dfrac{a}{4}\right) = \dots$

15 ★★★☆ Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. La fraction $\dfrac{p}{q}$ est dite irréductible à dénominateur positif (IDP) si p et q sont premiers entre eux et si q est positif. À toute fraction de $\mathbb{Q}$, il existe une unique fraction IDP qui lui est égale. Par exemple, la fraction $-\dfrac{30}{12}$ est égale à la fraction IDP $\dfrac{-5}{2}$.
Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on note $d(x)$ le dénominateur de la fraction IDP qui est égale à x. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{d(x)} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$ et continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Pour la discontinuité en $a \in \mathbb{Q}$, utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité de f en a et une suite bien choisie.
Pour la continuité en $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on peut partir de la définition. Pour tout $\varepsilon > 0$, il faudra notamment trouver un $\delta > 0$ tel que $|x-a| \leq \delta$ entraine ou bien $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ou bien $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $|\dfrac{1}{q}| \leq \varepsilon$, auquel cas on aura bien $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. Pour trouver ce δ, on peut considérer l'ensemble

$$X_\varepsilon = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*, |q| < \frac{1}{\varepsilon} \right\}$$

et montrer que l'ensemble des distances entre a et les points de X_ε, à savoir :

$$\left\{ |a-x| \,\middle|\, x \in X_\varepsilon \right\}$$

admet un minimum strictement positif. Le δ à poser s'en déduit...

Théorèmes sur la continuité

16 ★☆ (*Un classique !*) Soit P un polynôme réel de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.
Que peut-on dire des limites de P en $\pm\infty$?

17 ★☆ Vrai ou faux ? Justifier.

1) Toute fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ est croissante au voisinage de $+\infty$.
2) Toute fonction périodique possède une plus petite période strictement positive.
3) Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.
4) La fonction partie entière est continue sur $\left[0, 1\right[$.
5) L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.

6) S'il existe une suite (x_n) convergeant vers a telle que $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$, alors f est continue en a.

18 ★★ Montrer que l'équation

$$\sqrt{x^2-\pi}\sin x + x^2\cos x = -1$$

admet au moins une solution.
Considérer la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-\pi}\sin x + x^2\cos x + 1$ et montrer qu'elle s'annule en au moins un point.

19 ★★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$. Ce résultat est-il vrai si f est croissante ?
Considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et montrer qu'elle s'annule en au moins un point.

20 ★★ Existe-t-il une application bijective et continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$? de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$? de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$?
Pour chaque cas, essayer de dessiner une telle fonction. Si ça marche, tant mieux ! Il ne reste plus qu'à trouver une fonction qui correspond à cela.
Si cela ne marche pas, raisonner par l'absurde.

21 ★★ Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que f est bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.
Pour $f \circ g$, c'est évident.
Pour $g \circ f$, montrer que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle borné. Un théorème sur g permet ensuite de conclure, en faisant attention au fait que $f(\mathbb{R})$ n'est pas forcément un intervalle fermé.

22 ★★☆ Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.
Indication : on pourra considérer l'application $g : x \mapsto f(x) - x$.

23 ★★★ On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est <u>coercive</u> si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que si f est coercive et continue, alors elle atteint son minimum, c'est-à-dire :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \geq f(x_0)$$

En utilisant les limites en $\pm\infty$, il faut montrer (en rédigeant convenablement) que f ne peut atteindre son minimum que sur un intervalle fermé borné, par exemple de la forme $[-A, A]$.

24 ★★★ Un cycliste parcourt une distance de 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel ce cycliste aura parcouru exactement 10 km. (La demi-heure doit commencer après son départ et se terminer avant son arrivée).
Si on note $D(t)$ la distance parcourue par le cycliste entre les instants t et $t+30$ (en minutes), alors on peut reformuler le problème ainsi : on pose la fonction

$$\begin{aligned} f : [0,30] &\to \mathbb{R}_+ \\ T &\mapsto D(t) - 10 \end{aligned}$$

Le problème revient à montrer que f admette (au moins) un zéro, sachant que $D(0) + D(30) = 20$...